А.А. Наумов Н.В. Ходусов

УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ

Новосибирск

2005

ББК
УДК 336.763:336.67:519.6
Н 34

Наумов А.А., Ходусов Н.В.

Управление портфельными инвестициями. Модели и алгоритмы. - Новосибирск: «ОФСЕТ», 2005 – 298 с.

ISBN

Монография поможет получить достаточно полное представление о состоянии дел в такой бурно развивающейся и широко применяемой на практике теории, какой является теория оптимального портфеля. В ней в доступной и наглядной форме представлены основные модели этой теории и проиллюстрировано практическое ее применение с использованием программной среды EXPO4. Рассмотрены вопросы использования NFV – критериев при оценивании эффективности инвестиционных проектов.

Монография будет полезна как научным работникам, так и студентам старших курсов экономических специальностей университетов. Она сможет оказать помощь при выполнении расчетно-графических, курсовых работ и при написании магистерских диссертаций и дипломных проектов по тематикам, связанным с управлением инвестиционным портфелем. Основные вопросы, рассмотренные в монографии: «Управление оптимальным портфелем», «Риски оптимального портфеля», «Страхование риска в задаче оптимального портфеля», «Управление портфелем облигаций», «Критерии оценивания эффективности инвестиционных проектов» и некоторые другие.

Авторы выражают признательность своим коллегам и ученикам за поддержку и помощь при проведении исследований, нашедших отражение в данной монографии.

ББК
УДК 336.763:336.67:519.6
ISBN

Нашим предкам -

ближайшим и

далеким - посвящается.

Анатолий Наумов, Николай Ходусов

декабрь, 2004 год

Вместо предисловия

Предлагаемая Вашему вниманию монография представляет собой переработанное и дополненное издание книги Наумов А.А., Мезенцев Ю.А. Оптимальное управление инвестиционным портфелем. - Новосибирск: Лада, 2002, посвященной проблемам управления портфелем. Известно, что теория оптимального портфеля может быть использована при решении многих экономических проблем, таких, например, как управление недвижимостью, управление финансовыми потоками, управление страховыми проектами и рисками, управление инвестиционными проектами, управление производственными программами и многих других. Данная монография может быть полезной при разработке соответствующих информационных систем поддержки и принятия решений. Изложенный в книге материал позволит выбрать критерий и поможет оценить эффективность инвестиционных проектов на основе новых методик и подходов. Книга может быть рекомендована научным работникам, аспирантам и студентам университетов, а также экономистам и разработчикам информационных и программных комплексов и систем при разработке и реализации проектов, связанных с анализом и синтезом стратегий управления инвестициями.

1. УПРАВЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Финансовый риск связан с неопределенностью эффективности операции в момент заключения сделки. Очевидно, если задавать ограничения на риск, а в качестве критерия оптимальности рассматривать доходность, то будет сформирован портфель со структурой, отличной от такого портфеля, где в качестве критерия рассматривается риск при некотором уровне доходности.

Для достижения наилучшего для инвестора соотношения между прибылью и риском в работе исследуется, формализуется и решается задача управления оптимальным портфелем.

Отметим некоторые, на наш взгляд, важные обстоятельства, которые не позволяют эффективно использовать на практике классические модели задач оптимального управления портфелем.

1. В классических постановках определяются доли основного капитала, которые будут вкладываться в бумаги (инструменты), а не фактические значения количеств приобретаемых бумаг, что при некоторых соотношениях между объёмом инвестируемого капитала и ценами на бумаги может давать большие погрешности в общей доходности.

С этой целью предлагается перейти от непрерывной оптимизационной задачи синтеза оптимального портфеля и от соответствующей ей непрерывной модели к дискретным.

2. В классических подходах рассматривается только задача вложения капитала в бумаги (инструменты), но реально на

каждом из шагов принятия решения при работе с бумагами должна решаться и обратная задача: извлечения (изъятия) капитала.

В связи с этим предлагается подход, устраняющий эти некорректности (с практической точки зрения) классического подхода.

3. Результатом решения классической задачи оптимального портфеля является вектор частей (долей) основного капитала непременно вкладываемых в бумаги; при этом нельзя получить результат, который рекомендовал бы на текущий момент времени отказаться от покупки бумаг вообще. А реальность именно такова, что такая рекомендация может быть наиболее эффективной.

В работе исследуется подход к исправлению (корректировке) сложившихся стереотипов в этом смысле.

4. Если в основу задачи поиска оптимального портфеля положены подходы, близкие к подходу Келли, т.е. те, в которых максимизируется ожидаемая общая доходность портфеля, то, конечно же, нельзя не учитывать само абсолютное или относительное значение этой доходности, иначе это может приводить к снижению доходности в целом.

Ниже предлагается такой вариант поиска оптимальной стратегии управления портфелем, который максимизирует ожидаемое приращение общей доходности портфеля и исключает (с учётом оцениваемого риска) уменьшение (снижение) прироста общей доходности.

1.1. Постановка задачи

Напомним вид математических моделей для задач синтеза оптимальных стратегий управления портфелем ценных бумаг по Марковицу, Келли и Шарпу. Рассмотрим задачу нахождения оптимальной стратегии Марковица в динамике:

$$X^T(t)\hat{D}(t+1)X(t) \to \min_{X(t)} \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X^T(t)e = 1; X(t) \ge 0; \\ X^T(t)\hat{m}(t+1) = m^*(t+1). \end{cases}$$

Здесь $\hat{D}(t+1)$ - прогнозируемое на момент времени $t+1$ значение дисперсионной матрицы доходностей; $X(t) = \left(X_0(t), X_1(t), ..., X_n(t)\right)^T$ - вектор долей вложений капитала в ценные бумаги (в количестве *(n+1)*) или, другими словами, стратегия формирования портфеля на момент времени t, причем, $X_0(t)$ - доля вложений в безрисковую ценную бумагу; $e = (1,1,...,1)^T$ - вектор размерности *(n+1)*; $\hat{m}(t+1) = \left(\hat{m}_0(t+1), \hat{m}_1(t+1), ..., \hat{m}_n(t+1)\right)^T$ -вектор прогнозируемых доходностей ценных бумаг на момент времени $t+1$; $m^*(t+1)$ - желаемое значение общей доходности в момент времени $t+1$.

Как видно из постановки задачи (1.1), оптимальная стратегия $X^*(t)$ на момент времени $t = 0,1,2,...$, определяется оценками прогнозируемых на момент времени $t+1$ значений дисперсионной матрицы доходностей бумаг и доходностью каждой из бумаг.

Отметим некоторые важные обстоятельства подхода Марковица.

1. Стратегии Марковица являются функцией ожидаемой доходности, которая в общем случае может быть недостижима.
2. Дисперсия доходности $X^T(t)\hat{D}(t+1)X(t)$ рассматривается как риск, но фактически это мера неопределенности.
3. Отсутствует динамика в смене стратегий.
4. Зафиксированный уровень доходности $m^*(t+1)$ необходимо спрогнозировать на момент времени, на который оптимизируется стратегия.

Стратегия Келли, в отличие от стратегии Марковица, максимизирует доходность портфеля. Формально, задача по поиску стратегии Келли имеет вид:

$$X^T(t)\hat{m}(t+1) \to \max_{X(t)} \tag{1.2}$$

при

$$X^T(t)e = 1, x_i(t) \ge 0, i = 0,1,..,n.$$

Недостаток подхода Келли заключается в том, что в нём не учитывается риск при инвестировании. В отличие от стратегии Марковица, стратегия Келли оптимизирует доходность портфеля, но не учитывает риск оптимальной стратегии.

Более общим подходом является подход по Щарпу, в котором максимизируется взвешенная сумма риска и доходности:

$$(1-\lambda)X^T(t)\hat{m}(t+1) - \lambda X^T(t)\hat{D}(t+1)X(t) \to \max_{X(t)} \tag{1.3}$$

при

$$X^T(t)e=1, x_i(t)\geq 0, i=0,1,..,n. \quad (1.4)$$

Здесь $\lambda\in[0;1]$ - весовой множитель для критерия-свертки. Для задачи (1.3) проблемы заключаются в том, что:

1.Необходимо найти наилучшее значение λ, поскольку критерий оптимальности в (1.3) может быть очень чувствителен к значениям этого параметра;

2.В один общий критерий включены критерии с разными размерностями.

1.2. Примеры классических оптимальных портфелей

В данном параграфе исследуется изменение структуры оптимального портфеля, состоящего из двух акций, в зависимости от входных параметров – характеристик данных акций. В качестве математической модели для нахождения оптимального портфеля используется подход Шарпа.

Подход Шарпа представляет собой обобщение подходов Марковица и Келли. В соответствии с ним формально оптимальная стратегия управления портфелем находится как решение задачи:

$$(1-\lambda)X^T(t)\hat{m}(t+1)-\lambda X^T\hat{D}(t+1)X(t)\to\max_{X(t)}$$

при ограничениях

$$X^T(t)e=1,\ x_i(t)\geq 0,\ i=0,1,\dots,n;\quad \lambda\in[0;1];$$

где λ - весовой множитель критерия–свертки; как и выше, $X^T(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ – искомый вектор долей вложений (стратегия формирования портфеля); T – знак операции

транспонирования; $\hat{D}(t+1)$ - оценка дисперсионной матрицы доходностей на момент времени $(t+1)$; $e = (1,1, \dots, 1)^T$; $\hat{m}^T(t+1)=(\hat{m}_0(t+1),\hat{m}_1(t+1),\dots,\hat{m}_n(t+1))$ - вектор оценок доходностей ценных бумаг на момент времени $(t+1)$, то есть прогнозируемые значения ожидаемых доходностей ценных бумаг.

Критерий в задаче Шарпа получен из двух частных критериев: ожидаемой доходности с весом $(1-\lambda)$ и риска с весом λ. Таким образом, λ выступает в роли параметра предпочтения одного из двух критериев или отношения инвестора к риску.

1.2.1.Исследование изменения структуры оптимального портфеля в зависимости от отношения инвестора к риску

В данном параграфе в иллюстративных примерах в качестве изменяющегося параметра в задаче Шарпа рассматривается отношение инвестора к риску (λ), а все остальные параметры зафиксированы.

Пример 1.1.

Таблица 1.1.a

Вектор доходностей (m)	
Акция	Доходность
Акция 1	1
Акция 2	1

Таблица 1.1.b

Дисперсионная матрица (D)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	0
Акция 2	0	1

Отношение инвестора к риску λ =0.01÷0.99.

В данном примере акции 1 полностью идентичны акциям 2 (см. Табл. 1.1). Результаты вычислений показали, что для получения оптимального портфеля необходимо 50% капитала вложить в акции 1 и 50% капитала в акции 2 (см. Рис. 1.1),

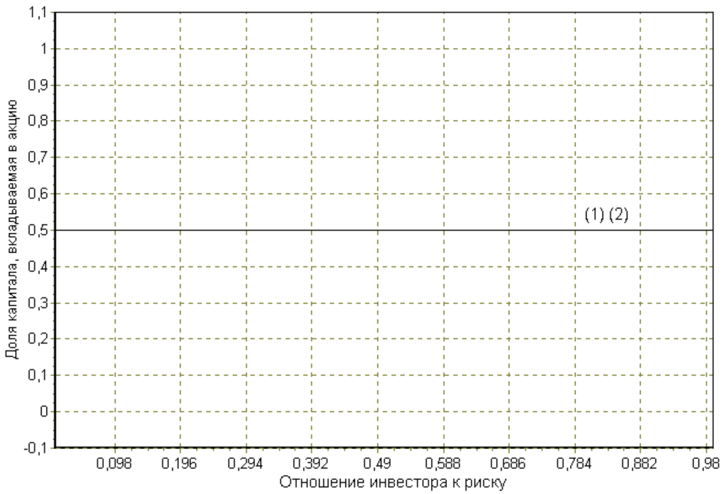

Рис. 1.1. Изменение структуры портфеля

причём данное решение не зависит от отношения инвестора к риску и от стохастической зависимости между доходностями акций, т.е. отличная от нуля ковариация доходностей акций 1 и акций 2 не повлияет на структуру портфеля.

Пример 1.2.

Таблица 1.2.a

Вектор доходностей (m)	
Акция	Доходность
Акция 1	2
Акция 2	1

Таблица 1.2.b

Дисперсионная матрица (D)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	0
Акция 2	0	1

В данном примере акция 1 отличаются от акции 2 только доходностью: доходность акций 1 в два раза превышает доходность акций 2 (см. Табл. 1.1).

Результаты вычислений показали, что в данном случае структура оптимального портфеля сильно зависит от отношения инвестора к риску (см. Рис. 1.2).

Отношение инвестора к риску $\lambda = 0.01 \div 0.99$.

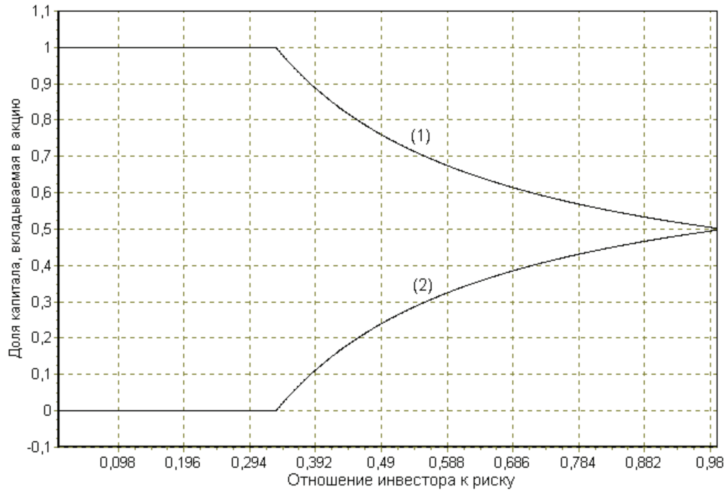

Рис. 1.2. Изменение структуры портфеля

При малых λ для получения оптимального портфеля необходимо 100% капитала вкладывать в акции 1, т.к. в данном случае риску уделяется малое внимание и решение принимается практически только исходя из доходностей акций. При дальнейшем увеличении λ доля капитала, вкладываемая в акции 1, постепенно снижается со 100% до 50%, а доля капитала, вкладываемая в акции 2, постепенно увеличивается с

0% до 50%. Это объясняется тем, что с увеличением λ при принятии решения всё меньшее внимание уделяется доходностям акций и всё большее – риску. Т.к. дисперсии доходностей акций равны, то при больших λ доли капитала, вкладываемые в акции обоих типов, практически равны.

Пример 1.3.

Таблица 1.3.a

Вектор доходностей (m)	
Акция	Доходность
Акция 1	2
Акция 2	1

Таблица 1.3.b

Дисперсионная матрица (D)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	0.9
Акция 2	0.9	1

Отношение инвестора к риску λ =0.01÷0.99.

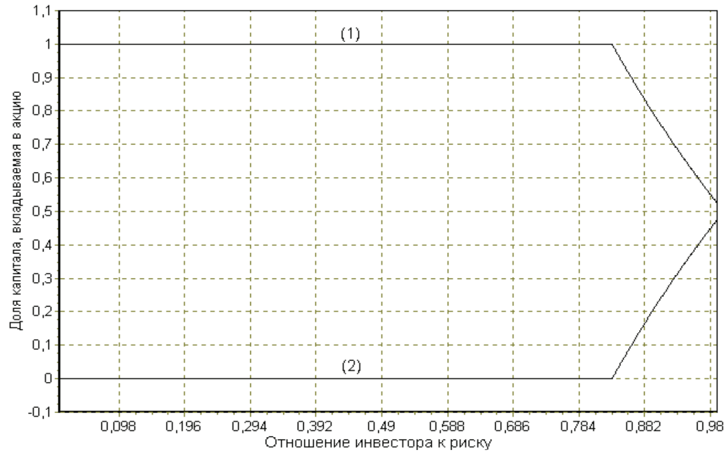

Рис. 1.3. Изменение структуры портфеля

Данный пример отличается от примера 2 только наличием сильной положительной связи между доходностями акций –

ненулевые недиагональные элементы матрицы (D) (см. Табл. 1.3). Результаты вычислений показали, что такая связь оказывает сильное влияние на решение (см. Рис. 1.3). Только при очень больших λ в структуре оптимального портфеля начинают появляться акции 2, причём их доля резко возрастает, а доля акций 1 резко падает. Это объясняется тем, что вложение капитала в акции с сильной положительной связью увеличивает риск, поэтому даже при больших λ предпочтение отдаётся акциям 1, т.к. они имеют большую доходность. При очень больших λ данное преимущество акций 1 исчезает, т.к. при принятии решения доходностям акций практически не уделяется внимания.

Пример 1.4.

Таблица 1.4.a

Вектор доходностей (m)	
Акция	Доходность
Акция 1	2
Акция 2	1

Таблица 1.4.b

Дисперсионная матрица (D)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	-0.9
Акция 2	-0.9	1

В данном примере, в отличие от примера 1.3, между доходностями акций существует сильная отрицательная связь (см. Табл. 1.4). Результаты вычислений показали, что наличие такой связи привело к началу оттока капитала из акций 1 в акции 2 при меньших λ, чем в примере 2 (см. Рис. 1.4). Это объясняется тем, что вложение капитала в акции с сильной отрицательной связью уменьшает риск, поэтому уже при малых λ преимущество акций 1 по доходности теряется на фоне возможности уменьшения риска за счет вложения капитала и в акции 1 и в акции 2.

Отношение инвестора к риску λ =0.01÷0.99.

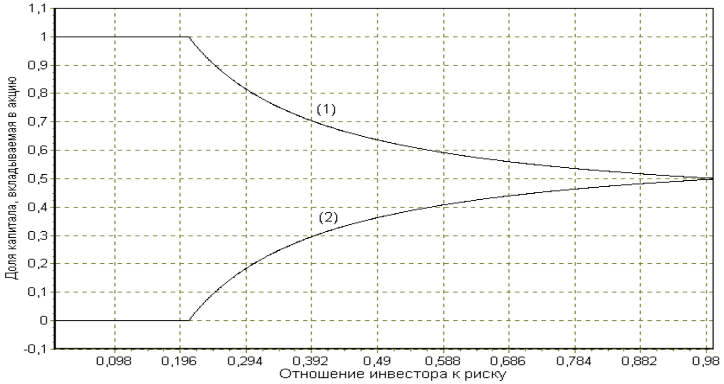

Рис. 1.4. Изменение структуры портфеля

1.2.2.Исследование изменения структуры оптимального портфеля в зависимости от доходности акций

В данном параграфе в качестве изменяющегося параметра задачи Шарпа используются доходности акций (вектор *m*), а все остальные параметры зафиксированы. Отношение инвестора к риску λ =0.5, т.е. при принятии решения будет уделяться равное внимание доходности и риску.

Пример 1.5.

Таблица 1.5.a

Вектор доходностей (*m*)	
Акция	Доходность
Акция 1	1÷2
Акция 2	1

Таблица 1.5.b

Дисперсионная матрица (*D*)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	0
Акция 2	0	1

Отношение инвестора к риску λ =0.5.

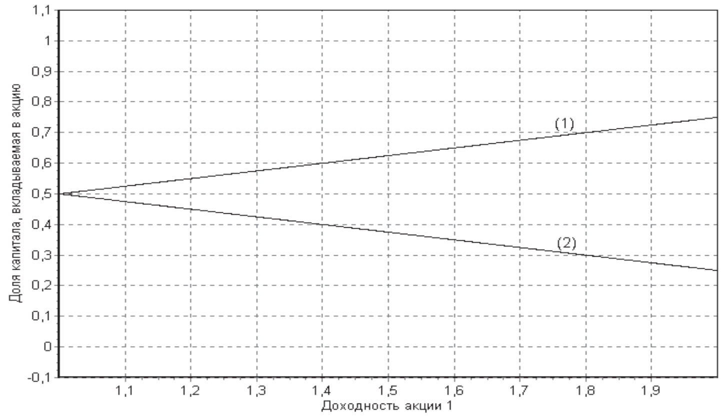

Рис. 1.5. Изменение структуры портфеля

В данном примере доходность акций 1 изменяется от 1 до 2 (см. Табл. 1.5). Результаты вычислений иллюстрируют тот факт, что с ростом доходности акций 1 доля капитала, вкладываемого в эти акции, увеличивается за счёт уменьшения доли капитала, вкладываемого в акции 2 (см. Рис. 1.5). Это объясняется увеличением привлекательности акций 1 по сравнению с акциями 2, т.к., обладая равными дисперсиями, доходность акций 1 превышает доходность акций 2.

Пример 1.6.

Таблица 1.6.a

Вектор доходностей (*m*)	
Акция	Доходность
Акция 1	1÷2
Акция 2	1

Таблица 1.6.b

Дисперсионная матрица (*D*)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1	0.9
Акция 2	0.9	1

Отношение инвестора к риску λ =0.5.

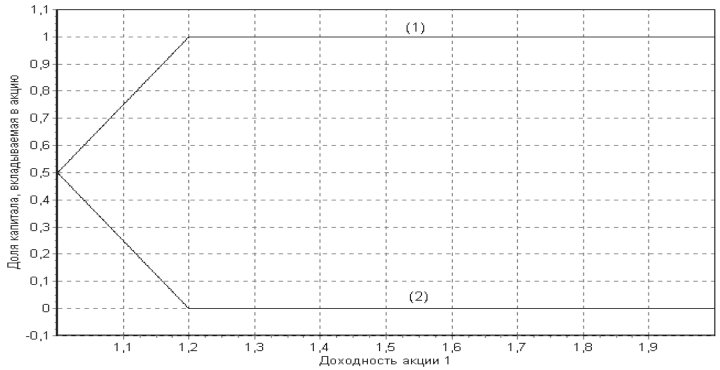

Рис. 1.6.Изменение структуры портфеля

Данный пример отличается от примера 1.5 тем, что в нем имеет место сильная положительная связь между доходностями акций (см. Табл. 1.6). Результаты вычислений показали, что наличие такой связи оказывает сильное влияние на решение (см. Рис. 1.6). С увеличением доходности акций 1 доля капитала, вкладываемого в них, резко возрастает до 100% за счёт такого же резкого уменьшения доли капитала, вкладываемого в акции 2, до 0%. Это объясняется тем, что вложение капитала в акции с сильной положительной связью приводит к увеличению риска, поэтому отдаётся предпочтение акциям 1, т.к. при равной дисперсии они имеют большую доходность.

1.2.3.Исследование изменения структуры оптимального портфеля в зависимости от дисперсии доходности акций

В данном параграфе в качестве изменяющегося параметра задачи Шарпа выступают дисперсии доходностей акций

(диагональные элементы матрицы *D*), все остальные параметры зафиксированы. Отношение инвестора к риску λ =0.5, таким образом, при принятии решения будет уделяться равное внимание доходности и риску.

Пример 1.7.

Таблица 1.7.a

Вектор доходностей (*m*)	
Акция	Доходность
Акция 1	1
Акция 2	1

Таблица 1.7.b

Дисперсионная матрица (*D*)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1÷2	0
Акция 2	0	1

В данном примере дисперсия доходности акции 1 увеличивается от 1 до 2 (см. Табл. 1.7). Результаты вычислений показали, что с ростом дисперсии доходности акций 1 доля капитала, вкладываемого в эти акции, уменьшается за счёт увеличения доли капитала, вкладываемого в акции 2 (см. Рис. 1.7).

Отношение инвестора к риску λ =0.5.

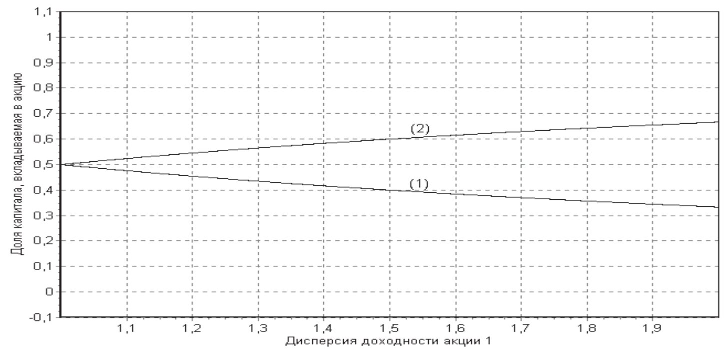

Рис. 1.7. Изменение структуры портфеля

Это можно объяснить увеличением привлекательности акций 2 по сравнению с акциями 1, т.к., обладая равными доходностями, дисперсия доходности акций 1 превышает дисперсию доходности акций 2.

Пример 1.8.

Таблица 1.8.a

Вектор доходностей (m)	
Акция	Доходность
Акция 1	1
Акция 2	1

Таблица 1.8.b

Дисперсионная матрица (D)		
	Акция 1	Акция 2
Акция 1	1÷2	0.9
Акция 2	0.9	1

Данный пример отличается от примера 1.7 наличием сильной положительной связи между доходностями акций (см. Табл. 1.8). Результаты вычислений показали, что наличие такой связи оказывает сильное влияние на решение (см. Рис. 1.8). С увеличением дисперсии доходности акций 1 доля капитала, вкладываемого в них, уменьшается быстрее, чем в примере 1.7.

Последнее можно объяснить тем, что вложение капитала в акции с сильной положительной связью приводит к увеличению риска, поэтому отдаётся предпочтение акциям 2, т.к. при равной доходности они имеют меньшую дисперсию доходности. Нелинейность кривых объясняется нелинейным вхождением элементов матрицы D в модель, а также тем, что с увеличением дисперсии доходности ковариация доходностей изменяется, т.е. с увеличением дисперсии доходности эффект положительной связи ослабевает.

Отношение инвестора к риску λ =0.5.

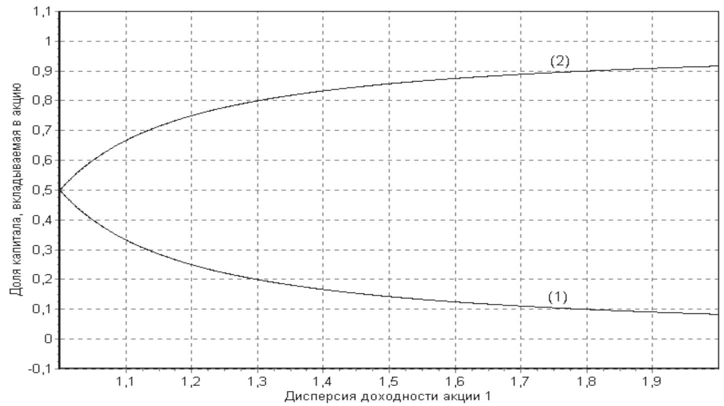

Рис. 1.8. Изменение структуры портфеля

1.3. Новые подходы к решению задачи управления портфелем

Перейдём к построению модели портфеля, которая учитывала бы все вышеприведённые замечания и уточнения. Прежде всего, дадим возможность компонентам вектора $X^T(t)=(X_0(t),X_1(t),\dots,X_n(t)\ )$ (стратегии управления портфелем) принимать как положительные, так и отрицательные целочисленные значения, т.е. $X_i(t)<0, X_i(t)\geq 0$, *i = 0,1,...,n,* и снимем ограничение нормировки $X^T(t)e=1$. При этом, пусть каждое значение $X_i(t)$, *i = 0,1,...,n* соответствует числу приобретаемых (при $X_i(t)>0$) или продаваемых (при $X_i(t)<0$) бумаг *i*-го вида.

Введём обозначение $I^+(t)=\{i| \quad i\in\{0,1,...,n\}, X_i(t)\geq 0\}$ и $I^-(t)=\{i \quad (i\in\{0,1,...,n\}, X_i(t)<0\}=I\setminus I^+(t)$, где $I=\{0,1,...,n\}$. Пусть также в момент времени *t* вновь инвестируемый объём капитала составляет $K^{+}(t)$, а капитал, который мы хотим вывести из обращения и использовать в каких-либо других операциях составляет $K^{-}(t)$. Обозначим цену продажи *i*-ой бумаги в момент *t* через $m_i^{+}(t)$, а цену покупки через $m_i^{-}(t)$. Тогда, с учётом сделанных допущений и обозначений, объём капитала, который может быть инвестирован в инструменты на момент времени *t*, составляет:

$$K(t) = -\sum_{I^{-}(t)} X_i(t) m_i^{-}(t) + K^{+}(t). \qquad (1.5)$$

При этом должны выполняться ограничения:

$$-\sum_{I^{-}(t)} X_i(t) m_i^{-}(t) + K^{+}(t) \ge \sum_{I^{+}(t)} X_i(t) m_i^{+}(t); \qquad (1.6)$$

(т.е. вкладываемый в инструменты капитал не должен быть больше, чем сумма капиталов извлекаемого из инструментов и свободного (инвестируемого) на момент времени *t*);

$$K^{-}(t) \le -\sum_{I^{-}(t)} X_i(t) m_i^{-}(t) \qquad (1.7)$$

(объём изымаемого из обращения по ценным бумагам капитала не больше, чем сумма, полученная в результате продажи бумаг).

Очевидно, что

$$\sum_{j=0}^{t} X_i(j) = X_{i,0}(t),\ \text{i = 0,1,...,n}, \qquad (1.8)$$

-общее число бумаг *i*-го вида, которые образуют портфель на момент времени *t*; $X_{i,0}(0) = X_{i,0} \ge 0$, $i \in I$. Тогда, капитал, вложенный в бумаги, на момент времени *t*, можно оценить величиной:

$$\sum_{i=0}^{n} X_{i,0}(t) m_i^{-}(t) = K_b(t), \qquad (1.9)$$

а для момента времени *(t+1)* капитал можно оценить так:

$$K_b(t+1) = \sum_{i=0}^{n} X_{i,0}(t) m_i^{-}(t+1). \qquad (1.10)$$

Тогда, задача управления портфелем состоит в нахождении таких значений компонент вектора $X(t)$, при которых максимизируется разность

$$\Delta K_b(t+1) = K_b(t+1) - K_b(t) \to \max_{X(t)} \qquad (1.11)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=0}^{t} X_i(j) \ge 0,\ \text{i = 0,1,2,...,n}; \qquad (1.12)$$

$X_i(j)$ - целочисленные значения,

i = 0,1,2,...,n; j = 0,1,...,t; (1.13)

$$-\sum_{I^{-}(t)} X_i(t) m_i^{-}(t) \ge K^{-}(t); \qquad (1.14)$$

$$-\sum_{I^{-}(t)} X_i(t) m_i^{-}(t) + K^{+}(t) \ge \sum_{I^{+}(t)} X_i(t) m_i^{+}(t); \qquad (1.15)$$

$$K_b(t+1) - K_b(t) > K_b^{*}(t+1) > 0. \qquad (1.16)$$

Сделаем очевидные предположения относительно вышеприведённой модели движения капитала по ценным бумагам. Во-первых, если $K^{-}(t) > 0$, то $K^{+}(t) = 0$, другими словами: нет смысла инвестировать капитал в бумаги и одновременно выводить его из оборота. Во-вторых, наоборот, если $K^{+}(t) > 0$, то $K^{-}(t) = 0$. Таким образом, фактически, вышеприведённая задача синтеза оптимального портфеля